JOURNAL OF ALGEBRA 21, 410–421 (1972)

Objets cohérents et ultraproduits dans les catégories

SABAH FAKIR ET LABIB HADDAD

Department of Mathematics, Dalhousie University, Halifax (N. S.), Canada

Communicated by Saunders MacLane

Received October 7, 1970

Revised November 20, 1970

INTRODUCTION

L'objet de cet article est de proposer une généralisation des notions d'objet de *présentation finie* et d'objet *cohérent* dans les catégories et d'en faire l'étude surtout dans les catégories de Grothendieck. Cette généralisation repose sur la notion d'*ultraproduit*. Dans une catégorie, un ultraproduit A_U d'une famille d'objets $(A_i)_{i \in I}$, suivant un ultrafiltre U sur I, est une limite inductive filtrante des produits partiels $A_J = \prod_{i \in J} A_i$, $J \in U$. Cela généralise convenablement la notion classique d'ultraproduit que l'on utilise couramment en théorie des modèles.

On introduit alors les notions d'objet infraprojectif et d'objet $\mathfrak{D}$-cohérent de la manière suivante. On dira qu'un objet E est infraprojectif lorsque tout morphisme $f : E \to A_U$ se relève en un morphisme $g : E \to A_J$ dans l'un des produits partiels, autrement dit lorsque l'application canonique

$$\hom(E, A_i)_U \to \hom(E, A_U)$$

est surjective.

Dans une catégorie de Grothendieck, finitaire et qui possède des produits, on montre (Proposition 1) qu'un objet de *type fini* est infraprojectif si et seulement s'il est de présentation finie. De plus, le quotient d'un objet infraprojectif par un sous-objet de type fini est également infraprojectif (Proposition 2). Enfin, tout objet projectif est infraprojectif. On sait que les objets E de présentation finie sont ceux pour lesquels le foncteur $\hom(E, \cdot)$ commute avec les limites inductives filtrantes; on voit ici que ce sont aussi ceux pour lesquels ce foncteur commute avec les ultraproduits.

Il faut se rappeler que l'on nomme objet cohérent tout objet de type fini dont tout sous-objet de type fini est de présentation finie. Étant donnés un objet A et une classe $\mathfrak{D}$ de sous-objets de A, on dira alors que A est $\mathfrak{D}$-*cohérent* lorsque tout élément de $\mathfrak{D}$ est infraprojectif. On dira qu'un objet B est $\mathfrak{D}$-injectif lorsqu'il est injectif relativement à tous les monomorphismes canoniques $j : S \to A$ de $\mathfrak{D}$. C'est une manière de généraliser la notion de module $\aleph_0$-injectif [3].

On établit alors un théorème général qui, sous certaines conditions, caractérise un objet $\mathfrak{D}$-cohérent par le fait que la classe des objets $\mathfrak{D}$-injectifs est "close par ultraproduits". Appliqué aux catégories de modules, ce théorème donne une caractérisation de modules n-cohérents (Proposition 5). En particulier, dans le cas des anneaux, il permet de retrouver "algébriquement" un résultat établi par Eklof et Sabbagh à l'aide de procédés de "logique mathématique" ainsi qu'un résultat de Stenström.

On obtient aussi une caractérisation des catégories de Grothendieck localement cohérentes qui possèdent des produits, différente des caractérisations de Oberst et Röhrl pour des catégories de Grothendieck de foncteurs (corollaire à la Proposition 4).

ULTRAPRODUITS ET INFRAPROJECTIFS

ULTRAPRODUITS. Soient $\mathfrak{A}$ une catégorie, $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathfrak{A}$ et U un ultrafiltre sur l'ensemble I. Pour tout $F \in U$, on suppose que le produit $\prod_{i\in F} A_i$ existe et on le désigne par A_F. Pour $G \supset F \in U$, les projections canoniques $A_G \to A_i$, $i \in F$, définissent un morphisme canonique $p_{G,F} : A_G \to A_F$. Ce système de morphismes est filtrant à droite. S'il possède une limite inductive on la désigne par $\phi_F : A_F \to A_U$, $F \in U$, et on dit que c'est un *ultraproduit* de la famille $(A_i)_{i\in I}$ suivant l'ultrafiltre U.

Cette notion a été introduite par Ohkuma [7, Définition 4, p. 27]. Elle généralise la notion classique d'ultraproduit d'ensembles, munis ou non de structures.

DÉFINITION. Soit $\mathfrak{M}$ une classe d'objets d'une catégorie $\mathfrak{A}$. On dira qu'un objet E de $\mathfrak{A}$ est *$\mathfrak{M}$-infraprojectif* lorsque pour tout ultraproduit $\phi_F : A_F \to A_U$, $F \in U$, d'une famille d'objets de $\mathfrak{M}$ et pour tout morphisme $f : E \to A_U$, il existe un élément $G \in U$ et un morphisme $g : E \to A_G$ tels que $\phi_G g = f$.

Lorsque $\mathfrak{M}$ est la classe de tous les objets de $\mathfrak{A}$, au lieu de dire $\mathfrak{M}$-infraprojectif, on dira simplement *infraprojectif.*

Remarques. 1. Dire que l'objet E est $\mathfrak{M}$-infraprojectif revient à dire que l'application canonique

$$\hom(E, A_i)_U = \varinjlim_{F\in U} \hom(E, A_F) \to \hom(E, A_U)$$

est surjective, pour tout ultraproduit d'une famille d'objets de $\mathfrak{M}$.

2. Lorsque tous les morphismes $p_{G,F}$ sont des épimorphismes, il en est de même des morphismes. $\phi_F : A_F \to A_U$. Dans ce cas, un objet projectif est aussi $\mathfrak{M}$-infraprojectif, pour tout choix de la classe $\mathfrak{M}$.

3. Lorsque tous les morphismes $p_{G,F}$ possèdent des sections, tout morphisme $f : E \to A_U$ qui se relève dans l'un des produits partiels A_F se relève aussi dans chacun des produits A_G. Ainsi, dans ce cas, pour que l'objet E soit $\mathfrak{M}$-infraprojectif il faut (et il suffit) que l'application

$$\hom(E, \phi_I) : \hom(E, A_I) \to \hom(E, A_U)$$

soit surjective, pour tout ultraproduit d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathfrak{M}$.

C'est le cas, en particulier, lorsque la catégorie possède des flèches nulles; par exemple, dans le cas de catégories abéliennes.

4. Tout facteur direct d'un objet $\mathfrak{M}$-infraprojectif et toute somme finie d'objets $\mathfrak{M}$-infraprojectifs sont des objets $\mathfrak{M}$-infraprojectifs. Dans le cas d'une catégorie avec flèches nulles, pour qu'une somme quelconque $\coprod_{i\in I} A_i$ soit $\mathfrak{M}$-infraprojective il faut et il suffit que chaque A_i le soit. Cela se démontre comme le résultat analogue pour les objets projectifs (en utilisant la remarque précédente).

Ultraproduits et catégories de Grothendieck

Rappels. On dit qu'un objet A d'une catégorie est de *type fini* lorsque pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-objets de A telle que $\sup_{i\in I} A_i = A$, il existe une partie *finie* J de I telle que $\sup_{i\in J} A_i = A$.

On dit qu'un objet A d'une catégorie abélienne est de *présentation finie* lorsqu'il est de type fini et que tout épimorphisme $f : B \to A$, où B est de type fini, possède un noyau de type fini.

On appelle *catégorie de Grothendieck* toute catégorie abélienne qui possède des limites inductives filtrantes exactes.

On peut faire remonter cette notion à la Proposition 1.8 (p. 133) et à l'axiome $AB5$ (p. 129) de Grothendieck [4].

La catégorie des modules sur un anneau donné est un exemple de catégorie de Grothendieck et les notions d'objet de type fini et d'objet de présentation finie y retrouvent leur sens habituel.

On dira qu'une catégorie est *finitaire* lorsque chacun de ses objets est limite inductive d'un *ensemble* filtrant de sous-objets de type fini.

LEMME 1. *Dans une catégorie de Grothendieck, les limites inductives filtrantes commutent avec les produits fibrés.*

(Autrement dit, si l'on considère un système inductif filtrant de diagrammes de produits fibrés, le diagramme obtenu en passant aux limites inductives est aussi un diagramme de produit fibré.)

Cela tient à ce que, dans une catégorie abélienne, les limites inductives commutent avec les produits finis et que, dans une catégorie de Grothendieck, les limites inductives filtrantes commutent avec les noyaux.

Le résultat suivant est établi par Auslander [1, Proposition 1.4, p. 193].

LEMME 2. *Soit A un objet de type fini d'une catégorie de Grothendieck. Alors, pour tout système inductif filtrant $(B_i)_{i\in I}$, l'application canonique*

$$\varinjlim \hom(A, B_i) \to \hom(A, \varinjlim B_i)$$

est injective.

Pour l'étude des objets infraprojectifs, on a également besoin du résultat suivant, cité *ainsi que sa réciproque* par Gruson [5, 2.1 Lemme 5, p. 21].

LEMME 3. *Dans une catégorie de Grothendieck finitaire, pour tout objet A de présentation finie, le foncteur* $\hom(A, \cdot)$ *commute avec les limites inductives filtrantes.*

Indications pour la démonstration. Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système inductif filtrant et soit $f_i : B_i \to B$, $i \in I$, une limite inductive. On considère l'application canonique

$$\xi : \varinjlim \hom(A, B_i) \to \hom(A, B).$$

Comme A est de type fini, l'application ξ est injective (Lemme 2). Il suffit alors de montrer qu'elle est surjective. Pour cela, on considère un morphisme $u : A \to B$ et on construit les produits fibrés suivants

$$\begin{array}{ccc} P_i & \xrightarrow{a_i} & A \\ {\scriptstyle u_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B_i & \xrightarrow[f_i]{} & B \end{array}$$

D'après le lemme 1, $a_i : P_i \to A$, $i \in I$, est une limite inductive. Comme A est de type fini, il existe $j \in I$ tel que a_j soit un épimorphisme. Or P_j est limite inductive d'un ensemble filtrant de sous-objets de type fini, donc il existe un sous-objet de type fini s: $S \to P_j$ tel que $a_j s$ soit un épimorphisme. Soit $n : N \to S$ un noyau de cet épimorphisme; comme A est de présentation finie, N est de type fini, donc l'application canonique

$$\varinjlim_{i\geqslant j} \hom(N, B_i) \longrightarrow \hom(N, B)$$

est injective (Lemme 2). On utilise alors le fait que l'image de $u_j s n$ est nulle dans $\hom(N, B)$ pour achever la démonstration.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "n"] & S \arrow[r, "s"] & P_j \arrow[rr, "a_j"] \arrow[dd, "u_j"'] & & A \arrow[dl, dashed] \arrow[dd, "u"] \\
& & & B_k \arrow[dr] & \\
& & B_j \arrow[ur] \arrow[rr, "f_j"'] & & B
\end{tikzcd}$$

On aura à se servir aussi du *lemme de relèvement* suivant.

LEMME 4. *Dans une catégorie de Grothendieck, soit* $f_i : A_i \to B_i$, $i \in I$, *un système inductif filtrant de monomorphismes. On considère les limites inductives*

$$a_i : A_i \to A \qquad \text{et} \qquad b_i : B_i \to B, \qquad i \in I \qquad \text{et} \qquad f = \varinjlim f_i : A \to B.$$

Soient E un objet de type fini et $s : E \to A$ un morphisme. S'il existe un indice j et un morphisme $t : E \to B_j$ tel que $fs = b_j t$, alors il existe un indice k et un morphisme $u : E \to A_k$ tel que $s = a_k u$.

Démonstration. On considère les suites exactes

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$$

et le diagramme exact suivant qui s'en déduit

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim \hom(E, A_i) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & \varinjlim \hom(E, B_i) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\beta"'] & \varinjlim \hom(E, C_i) \arrow[d, "\gamma"'] \\
0 \arrow[r] & \hom(E, A) \arrow[r, "\phi"] & \hom(E, B) \arrow[r, "\psi"] & \hom(E, C)
\end{tikzcd}$$

où $C = \varinjlim C_i$. Dire qu'il existe un indice j et un morphisme $t : E \to B_j$ tel que $fs = b_j t$ revient à dire qu'il existe τ tel que $\phi(s) = \beta(\tau)$. Mais alors $\gamma\nu(\tau) = \psi\beta(\tau) = \psi\phi(s) = 0$. Comme γ est injective (Lemme 2) on a $\nu(\tau) = 0$, donc il existe σ tel que $\tau = \lambda(\sigma)$. Ainsi $\phi\alpha(\sigma) = \beta\lambda(\sigma) = \beta(\tau) = \phi(s)$. Comme ϕ est injective, $s = \alpha(\sigma)$, d'où le résultat.

LEMME 5. *Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie de Grothendieck qui possède des produits. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des classes d'objets de $\mathfrak{A}$ telles que, pour tout $M \in \mathfrak{M}$ il existe* *un monomorphisme* $f : M \to N$ *où* $N \in \mathfrak{N}$. *Alors tout objet de type fini qui est* $\mathfrak{N}$-*infraprojectif est aussi* $\mathfrak{M}$-*infraprojectif.*

Démonstration. Soit E un objet $\mathfrak{N}$-infraprojectif de type fini. Soit $\phi_F : M_F \to M_U$, $F \in U$, un ultraproduit d'une famille $(M_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathfrak{M}$. Pour tout $i \in I$, on considère un monomorphisme $f_i : M_i \to N_i$ où $N_i \in \mathfrak{N}$. On considère un ultraproduit $\psi_F : N_F \to N_U$, $F \in U$, et le morphisme $f_U : M_U \to N_U$ induit par les f_i. Soit $s : E \to M_U$ un morphisme. Il existe alors $G \in U$ et $t : E \to N_G$ tel que $\psi_G t = f_U s$. D'après le lemme 4, il existe donc $H \in U$ et $u : E \to M_H$ tel que $\phi_H u = s$. Donc E est $\mathfrak{M}$-infraprojectif.

Voici enfin quelques propriétés des objets infraprojectifs dans les catégories de Grothendieck.

PROPOSITION 1. *Dans une catégorie de Grothendieck finitaire et qui possède des produits, pour qu'un objet de type fini soit infraprojectif, il faut et il suffit qu'il soit de présentation finie.*

Démonstration. Soit

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} E \longrightarrow 0$$

une suite exacte où L est de type fini et où E est infraprojectif. Soit I un ensemble filtrant de sous-objets de type fini de N dont la limite inductive est N. Pour chaque $K \in I$, soit $\bar{K} = \{G \mid K \subset G \in I\}$. Les $\bar{K}$ constituent une base de filtre sur I (le filtre des sections). On considère un ultrafiltre U plus fin. Pour chaque $K \in I$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \xrightarrow{\gamma_K} M_K \longrightarrow 0.$$

Soit $\phi_F : M_F \to M_U$, $F \in U$, un ultraproduit de la famille $(M_K)_{K \in I}$ et soit $\gamma : L \to M_I$ le morphisme défini par les γ_K. Pour chaque $K \in I$, $j_K : K \to N$, on a $\phi_I \gamma \alpha j_K = 0$, ainsi $\phi_I \gamma \alpha = 0$.

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[d, "j_K"] & & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] & L \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & E \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "t"] & 0 \\
& & M_I \arrow[r, "\phi_I"] & M_U &
\end{tikzcd}$$

Il existe donc $t : E \to M_U$ tel que $t\beta = \phi_I\gamma$. Or, si E est infraprojectif, il existe $u : E \to M_I$ tel que $\phi_I u = t$ (remarque 3). D'où $\phi_I u\beta = t\beta = \phi_I\gamma$. Comme L est de type fini, d'après le lemme 2, il existe $F \in U$ tel que $p_F u\beta = p_F\gamma$ (où $p_F : A_I \to A_F$ est la projection canonique). Ainsi, pour $K \in F$, on a $\gamma_K\alpha = 0$. Donc $j_K : K \to N$ est un isomorphisme et N est de type fini; donc E est de présentation finie.

L'implication réciproque découle du Lemme 3.

Remarque. De la même manière, on peut établir le résultat suivant: *Dans une catégorie de Grothendieck finitaire et qui possède des produits, pour qu'un objet E soit de type fini, il faut et il suffit que pour tout ultraproduit A_U d'une famille d'objets A_i, $i \in I$, l'application canonique*

$$\hom(E, A_i)_U \to \hom(E, A_U)$$

soit injective.

Ainsi dans les mêmes conditions, *pour qu'un objet E soit de présentation finie, il faut et il suffit que le foncteur* $\hom(E, \cdot)$ *commute avec les ultraproduits.*

Proposition 2. *Dans une catégorie de Grothendieck, le quotient d'un objet $\mathfrak{M}$-infraprojectif par un sous-objet de type fini est un objet $\mathfrak{M}$-infraprojectif (pour tout choix de $\mathfrak{M}$).*

Démonstration. Soit

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} E \longrightarrow 0$$

une suite exacte où L est $\mathfrak{M}$-infraprojectif et N est de type fini. Soit $\phi_F : M_F \to M_U$, $F \in U$, un ultraproduit d'une famille d'objets de $\mathfrak{M}$. Soit $f : E \to M_U$ un morphisme. Comme L est $\mathfrak{M}$-infraprojectif, il existe $G \in U$ et $g : L \to M_G$ tels que $\phi_G g = f\beta$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] & L \arrow[dd, "g"'] \arrow[rr, "\beta"] & & E \arrow[r] \arrow[dl, "h"'] \arrow[dd, "f"] & 0 \\
 & & & M_H \arrow[dr, "\phi_H"] & & \\
 & & M_G \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "\phi_G"'] & & M_U &
\end{tikzcd}$$

Ainsi $\phi_G g\alpha = f\beta\alpha = 0$ et comme N est de type fini, d'après le Lemme 2, il existe $H \in U$, $H \subset G$, tel que $pg\alpha = 0$, où $p = p_{G,H} : M_G \to M_H$ est la projection canonique. Il existe donc $h : E \to M_H$ tel que $h\beta = pg$. Ainsi $\phi_H h\beta = \phi_H pg = \phi_G g = f\beta$; donc $\phi_H h = f$ et E est $\mathfrak{M}$-infraprojectif.

COROLLAIRE. *Dans une catégorie de Grothendieck, le quotient d'un objet projectif par un sous-objet de type fini est un objet infraprojectif.*

On se sert de la Remarque 2.

SUR LA NOTION D'OBJETS COHÉRENTS

DÉFINITION. Dans une catégorie $\mathfrak{A}$, soit $\mathfrak{D}$ une classe de sous-objets d'un objet A. On dira que A est $\mathfrak{D}$-*cohérent* lorsque tout élément de $\mathfrak{D}$ est infraprojectif. On dira qu'un objet B de $\mathfrak{A}$ est $\mathfrak{D}$-*injectif* lorsque pour tout élément $j : S \to A$ de $\mathfrak{D}$, tout morphisme $f : S \to B$ se prolonge en un morphisme $g : A \to B$, $gj = f$.

Tout produit d'objets $\mathfrak{D}$-injectifs est $\mathfrak{D}$-injectif et tout facteur direct d'un objet $\mathfrak{D}$-injectif est $\mathfrak{D}$-injectif. Cela se démontre comme la proposition analogue pour les injectifs. De plus, tout objet injectif est $\mathfrak{D}$-injectif, pour tout choix de $\mathfrak{D}$.

PROPOSITION 3. *Si l'objet A est $\mathfrak{D}$-cohérent, alors tout ultraproduit d'objets $\mathfrak{D}$-injectifs est $\mathfrak{D}$-injectif.*

Démonstration. Soit $\phi_F : B_F \to B_U$, $F \in U$, un ultraproduit d'une famille d'objets $\mathfrak{D}$-injectifs. Soient $j : S \to A$ un élément de $\mathfrak{D}$ et $f : S \to B_U$ un morphisme. Comme S est infraprojectif, il existe $G \in U$ et $g : S \to B_G$ tel que $\phi_G g = f$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & A \arrow[dl, "h"'] \\ B_G \arrow[r, "\phi_G"'] & B_U \end{tikzcd}$$

Comme B_G est $\mathfrak{D}$-injectif, il existe $h : A \to B_G$ tel que $hj = g$. Ainsi $\phi_G hj = \phi_G g = f$, donc B_U est $\mathfrak{D}$-injectif.

En utilisant le lemme 3, on démontre de la même manière le résultat suivant.

PROPOSITION 3'. *Dans une catégorie de Grothendieck finitaire, soit $\mathfrak{D}$ une classe de sous-objets de présentation finie d'un objet A. Alors toute limite inductive filtrante d'objets $\mathfrak{D}$-injectifs est un objet $\mathfrak{D}$-injectif.*

Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie et soit $\mathfrak{J}$ la classe de ses objets injectifs. On dira qu'un objet de $\mathfrak{A}$ est *subprojectif* lorsqu'il est $\mathfrak{J}$-infraprojectif. Rappelons que l'expression "*$\mathfrak{A}$ possède suffisamment d'injectifs*" signifie que, pour tout objet A de $\mathfrak{A}$, il existe un monomorphisme $f : A \to I$ où $I \in \mathfrak{J}$ (voir [4, p. 137]).

THÉORÈME. *Dans une catégorie de Grothendieck qui possède des produits et suffisamment d'injectifs, soit $\mathfrak{D}$ une classe de sous-objets de type fini d'un objet A. Si A est subprojectif, alors les énoncés suivants sont équivalents:*

a) *L'objet A est $\mathfrak{D}$-cohérent.*

b) *Tout ultraproduit d'objets $\mathfrak{D}$-injectifs est $\mathfrak{D}$-injectif.*

c) *Tout ultraproduit d'objets injectifs est $\mathfrak{D}$-injectif.*

Démonstration. D'après la proposition 3, on a a) $\Rightarrow$ b), et il est clair que b) $\Rightarrow$ c).

c) $\Rightarrow$ a) D'après le Lemme 5, tout objet subprojectif de type fini est infraprojectif. Soit $j : S \to A$ un sous-objet de A appartenant à $\mathfrak{D}$. Il suffira donc de montrer que S est subprojectif. On considère un ultraproduit $\phi_F : B_F \to B_U$, $F \in U$, d'une famille d'objets injectifs et un morphisme $f : S \to B_U$. Comme B_U est $\mathfrak{D}$-injectif, il existe $g : A \to B_U$ tel que $gj = f$. Mais A est subprojectif, il existe donc $G \in U$ et $h : A \to B_G$ tels que $\phi_G h = g$, donc $\phi_G hj = gj = f$; donc S est bien subprojectif.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f" near end] & A \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "h"' near end] \\
B_G \arrow[r, "\phi_G"'] & B_U
\end{tikzcd}$$

APPLICATIONS

OBJETS COHÉRENTS. Rappelons que, dans une catégorie abélienne, on dit qu'un objet A est *pseudo-cohérent* lorsque tous ses sous-objets de type fini sont de présentation finie. On dit que A est *cohérent* lorsqu'il est pseudo-cohérent et de type fini (voir, par exemple, [5, p. 21]).

Pour tout objet A, on désignera par $(\aleph_0, A)$ la classe de ses sous-objets de type fini.

PROPOSITION 4. *Dans une catégorie de Grothendieck finitaire et qui possède des produits, pour qu'un objet A soit pseudo-cohérent, il faut et il suffit qu'il soit* $(\aleph_0, A)$*-cohérent.*

C'est une conséquence immédiate des définitions et de la Proposition 1.

COROLLAIRE. *Dans une catégorie de Grothendieck qui possède des produits, on suppose qu'il existe un ensemble générateur* $\mathfrak{G}$ *dont tout élément est de présentation finie. Si G est la somme des éléments de* $\mathfrak{G}$*, les énoncés suivants sont équivalents*:

a) *Tout objet de présentation finie est cohérent.*

b) *Tout élément de* $\mathfrak{G}$ *est cohérent.*

c) *Le générateur G est pseudo-cohérent.*

d) *Toute limite inductive filtrante d'objets* $(\aleph_0, G)$*-injectifs est* $(\aleph_0, G)$*-injectif.*

e) *Tout ultraproduit d'objets* $(\aleph_0, G)$*-injectifs est* $(\aleph_0, G)$*-injectif.*

f) *Tout ultraproduit d'objets injectifs est* $(\aleph_0, G)$*-injectif.*

Indications pour la démonstration. Il faut savoir qu'une catégorie de Grothendieck qui possède un générateur, possède suffisamment d'injectifs (voir, par exemple, [4, Théorème 1.10.1, p. 135]). Il faut se souvenir aussi que toute catégorie de Grothendieck qui possède un ensemble générateur dont tout élément est de type fini, est finitaire. Il faut remarquer ensuite que G est infraprojectif (Remarque 4 et Proposition 1).

En appliquant alors les propositions 3′ et 4 et le théorème, on a les équivalences c) $\Leftrightarrow$ d) $\Leftrightarrow$ e) $\Leftrightarrow$ f).

Étant donnée une suite exacte

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

on *démontre* que

(α) si A et C sont pseudo-cohérents, alors B est pseudo-cohérent;

(β) si B est pseudo-cohérent et A de type fini, alors C est pseudo-cohérent.

On note alors qu'un sous-objet de type fini d'une somme $\coprod_{i \in I} A_i$ est aussi sous-objet d'une somme $\coprod_{i \in J} A_i$ où J est une partie finie de I. Donc toute somme d'objets pseudo-cohérents est un objet pseudo-cohérent (on utilise (α)).

Cela permet de montrer que b) $\Rightarrow$ c).

On *démontre* enfin que tout objet de présentation finie qui est quotient d'un objet pseudo-cohérent, est cohérent (on utilise (β)). Or tout objet de la catégorie est quotient d'une somme de copies du générateur G, d'où c) $\Rightarrow$ a).

On comparera ce corollaire au Théorème 4.1 de Oberst et Röhrl [6, p. 101].

MODULES a-COHÉRENTS. Soit A un anneau (ayant un élément unité). La catégorie des A-modules à gauche est une catégorie de Grothendieck finitaire qui possède suffisamment d'injectifs et dont A est un générateur. Donc tout ce qui précède s'applique à elle.

Pour tout cardinal a et pour tout module M, *on désignera par* (a, M) *l'ensemble des sous-modules de* M *qui ont un système de générateurs* G *tel que* Card $(G) < a$. Ainsi, en particulier, l'ensemble des sous-modules de type fini de M est désigné par $(\aleph_0, M)$ ce qui est compatible avec la notation introduite plus haut.

On dira qu'un module M est *a-cohérent* lorsqu'il est (a, M)-cohérent, autrement dit lorsque tout sous-module de M engendré par strictement moins de a éléments est infraprojectif. En particulier, un module $\aleph_0$-cohérent c'est un module pseudo-cohérent (Proposition 4).

Par application de la proposition 3′ et de notre théorème, on obtient le résultat suivant: :

PROPOSITION 5. *Pour tout cardinal* $n \leqslant \aleph_0$ *et tout module* M *subprojectif, les énoncés suivants sont équivalents*

a) *Le module* M *est n-cohérent,*

b) *Toute limite inductive filtrante de modules* (n, M)*-injectifs est* (n, M)*-injectif,*

c) *Tout ultraproduit de modules* (n, M)*-injectifs est* (n, M)*-injectif,*

d) *Tout ultraproduit de modules injectifs est* (n, M)*-injectif.*

Lorsqu'on applique cette proposition au cas où le module M est l'anneau A lui-même, on retrouve un résultat de Eklof et Sabbagh [3] (une partie du Théorème 3.12 combinée avec le Lemme 3.13), ainsi qu'un résultat de Stenström [8, Théorème 3.2, a $\Leftrightarrow$ d].

On terminera par une caractérisation des modules n-cohérents pour n fini, analogue à une caractérisation connue des anneaux cohérents (voir Bourbaki [2, I, 2, exercise 12 g, p. 63]).

Pour qu'un module soit 2*-cohérent, il faut et il suffit que l'annulateur de chacun de ses éléments soit de type fini.*

Étant donné un entier $n \geqslant 2$, *pour qu'un module soit n-cohérent, il faut et il suffit qu'il soit* 2*-cohérent et que pour tout sous-module monogène* N *et tout sous-module* P *engendré par au plus* $n - 2$ *éléments, le sous-module* $N \cap P$ *soit de type fini.*

Cela se démontre, par récurrence, en utilisant Bourbaki [2, I, 2, Lemme 9, p. 37 et exercice 6 f, p. 61].

BIBLIOGRAPHIE

1. M. AUSLANDER, Coherent functors, *Proc. Conf. Cat. Algebra* (1965), 189–231; Springer-Verlag, New York, 1966.
2. N. BOURBAKI, Éléments de mathématiques, *Act. Sci. Ind.*; "Algèbre commutative," Chaps. I, II, Hermann, Paris, 1961.
3. P. EKLOF AND G. SABBAGH, Model-completions and modules, à paraître dans *Ann. Math. Logic.*
4. A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.* **9** (1957), 119–221.
5. L. GRUSON, Complétions abéliennes, *Bull. Sci. Math.* **90** (1966), 17–40.
6. U. OBERST AND H. RÖHRL, Flat and coherent functors, *J. Algebra* **14** (1970), 91–105.
7. T. OHKUMA, Ultrapowers in categories, *Yokohama Math. J.* **14** (1966), 17–37.
8. B. STENSTRÖM, Coherent rings and FP-Injective modules, *J. London Math. Soc.* (2) **2** (1970), 323–329.